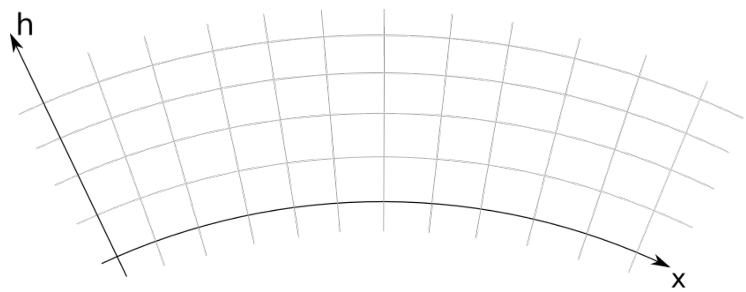
1 Refrakcja atmosferyczna na płaskiej i kulistej Ziemi

Ten dokument pokrótce pokazuje, jak opisać matematycznie refrakcję atmosferyczną. Dopuszcza przy tym kształt Ziemi zarówno kulisty (kula o promieniu R), jak i płaski (który będziemy modelować przez $R \to \infty$).

1.1 Założenia

Przyjmiemy, że atmosfera jest jednorodna w kierunku wzdłuż powierzchni Ziemi, tj. współczynnik załamania jest funkcją jedynie wysokości nad poziomem morza: $n = n(h)$.
Przy tym założeniu, jedyne odchylenia toru promienia będą zachodzić w pionie, więc możemy rozważania prowadzić w jedynie dwóch wymiarach. Przyjmiemy układ współrzędnych, w którym jedną współrzędną h jest wysokość nad poziomem morza, a drugą x jest odległość mierzona wzdłuż powierzchni na poziomie morza ($h = 0$).



Zakładając promień Ziemi R, nasz układ odpowiada układowi biegunowemu, w którym $h = r - R$ oraz $x = R\varphi$. Jak łatwo sprawdzić, element długości w takich współrzędnych wynosi:

$$dl^2 = dh^2 + \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 dx^2 \tag{1}$$

Warto zauważyć, że dla płaskiej Ziemi - przy $R \to \infty$ - element długości sprowadza się do $dl^2 = dh^2 + dx^2$ i nasz układ współrzędnych jest wtedy zwykłym układem kartezjańskim.

1.2 Zasada Fermata

Zasada Fermata przy naszych założeniach będzie miała postać:

$$\int n(h) dl = \min \tag{2}$$

Po podstawieniu dl z równania 1:

$$\int n(h) \sqrt{dh^2 + \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 dx^2} = \min \tag{3}$$

Rozwiązaniem będzie pewien tor wyrażony jako funkcja $h(x)$. W związku z tym dh wyrazimy jako $\dot{h}dx$, gdzie kropka oznacza różniczkowanie po x:

$$\int n(h)\sqrt{\dot{h}^2 + \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} dx = \min \tag{4}$$

Równanie 4 jest zagadnieniem wariacyjnym, które można rozwiązać przy pomocy równanie Eulera-Lagrange'a. "Lagranżjanem" w tym przypadku będzie:

$$L(x, h, \dot{h}) = n(h)\sqrt{\dot{h}^2 + \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} \tag{5}$$

Równanie Eulera-Lagrange'a przyjmie postać:

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \dot{h}} \tag{6}$$

Policzmy zatem poszczególne pochodne.

$$\frac{\partial L}{\partial h} = n'\sqrt{\dot{h}^2 + \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} + \frac{n\left(1 + \frac{h}{R}\right)}{R\sqrt{\dot{h}^2 + \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}} \tag{7}$$

(n' oznacza $\frac{dn}{dh}$ - pionowy gradient współczynnika załamania.)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{h}} = \frac{n\dot{h}}{\sqrt{\dot{h}^2 + \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}} \tag{8}$$

Licząc pochodną po x, uwzględniamy zależność od x ukrytą zarówno w $h(x)$ jak i $\dot{h}(x)$:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \dot{h}} = \frac{(n'\dot{h}^2 + n\ddot{h})\sqrt{\dot{h}^2 + \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} - n\dot{h}\frac{1}{2\sqrt{\dot{h}^2 + \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}}\left[2\dot{h}\ddot{h} + 2\left(1 + \frac{h}{R}\right)\frac{\dot{h}}{R}\right]}{\dot{h}^2 + \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} \tag{9}$$

Po przemnożeniu licznika i mianownika przez $\sqrt{\dot{h}^2 + \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$, otrzymujemy:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \dot{h}} = \frac{(n'\dot{h}^2 + n\ddot{h})\left[\dot{h}^2 + \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2\right] - n\dot{h}\left[\dot{h}\ddot{h} + \left(1 + \frac{h}{R}\right)\frac{\dot{h}}{R}\right]}{\sqrt{\dot{h}^2 + \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}^3} \tag{10}$$

Podstawiając do (6) i mnożąc obie strony przez $\sqrt{\dot{h}^2 + \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}^3$, otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
&n'\left[\dot h^2+\left(1+\tfrac{h}{R}\right)^2\right]^2+\tfrac{n}{R}\left(1+\tfrac{h}{R}\right)\left[\dot h^2+\left(1+\tfrac{h}{R}\right)^2\right]= \\
&=(n'\dot h^2+n\ddot h)\left[\dot h^2+\left(1+\tfrac{h}{R}\right)^2\right]-n\dot h\left[\dot h\ddot h+\left(1+\tfrac{h}{R}\right)\tfrac{\dot h}{R}\right]
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Po uproszczeniu (pozostawiam do sprawdzenia Czytelnikowi) otrzymamy:

$$
\ddot h=\frac{n'}{n}\left[\dot h^2+\left(1+\frac{h}{R}\right)^2\right]+\frac{2\dot h^2}{R+h}+\frac{R+h}{R^2}
\tag{12}
$$

Na Ziemi płaskiej, w granicy $R\to\infty$, równanie 12 upraszcza się do:

$$
\ddot h=\frac{n'}{n}\left(1+\dot h^2\right)
\tag{13}
$$

1.3 Testy

Warto sprawdzić, czy otrzymane równania są sensowne. Można to zrobić np. sprawdzając, czy stały współczynnik załamania ($n'=0$) prowadzi do promieni będących liniami prostymi (brak refrakcji).
Podstawiając $n'=0$ do równań 12 i 13 otrzymujemy:

$$
\ddot h=\frac{2\dot h^2}{R+h}+\frac{R+h}{R^2}
\tag{14}
$$

oraz:

$$
\ddot h=0
\tag{15}
$$

Równanie 15 jest równaniem prostej w układzie kartezjańskim. Nieco trudniej zobaczyć, że równanie 14 też jest równaniem prostej. Najprościej zobaczyć to, biorąc pod uwagę, że równanie prostej w układzie biegunowym to $r(\varphi)=\frac{r_0}{\cos(\varphi-\varphi_0)}$ i podstawiając $r=R+h$ oraz $\varphi=\frac{x}{R}$:

$$
h(x)=\frac{R+h_0}{\cos\left(\frac{x-x_0}{R}\right)}-R
\tag{16}
$$

Pozostawiam Czytelnikowi sprawdzenie, że prosta dana równaniem 16 faktycznie spełnia równanie 14.
Druga możliwość to sprawdzenie, czy równanie 13 jest równoważne prawu Snelliusa. Prawo Snelliusa w ośrodku o współczynniku załamania zmieniającym się w sposób ciągły można zapisać jako:

$$
n\sin\alpha=\mathrm{const}
\tag{17}
$$

W naszym wypadku, tangens kąta między torem promienia a osią h (który jest kątem padania na płaszczyzny stałego współczynnika załamania) wynosi $\frac{1}{\dot h}$.
Zatem:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dot{h}^2}} \tag{18}$$

Prawo Snelliusa stanowi więc, że:

$$\frac{d}{dx}\frac{n}{\sqrt{1+\dot{h}^2}} = 0 \tag{19}$$

Przekształcając, otrzymujemy:

$$\frac{n'\dot{h}\sqrt{1+\dot{h}^2} - \frac{n}{2\sqrt{1+\dot{h}^2}}2\dot{h}\ddot{h}}{1+\dot{h}^2} = 0 \tag{20}$$

Stąd:

$$n'\dot{h}\left(1+\dot{h}^2\right) - n\dot{h}\ddot{h} = 0 \tag{21}$$

Co jest równoważne równaniu 13.

1.4 Uwagi

Nieintuicyjny wniosek z równania 13 jest taki, że nawet promień lecący poziomo nad płaszczyzną będzie zakręcał jeśli gradient współczynnika załamania jest niezerowy, mimo że współczynnik załamania wzdłuż jego toru nie zmienia się. Promień lecący poziomo ma $\dot{h} = 0$. Równanie 13 sprowadza się wtedy do:

$$\ddot{h} = \frac{n'}{n} \tag{22}$$

To jest równanie linii prostej tylko gdy $n' = 0$. Gdy $n' \neq 0$, promień będzie zakręcał.